L'oral de l'agrégation
- Isenmann

Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

222 239
246 241
235 236

Théorème : Soit $u_0\in L^2([0;2\pi])$ et $(d_n:=c_n(u_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.
Alors : il existe un unique $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que :
(1) $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $u(t;\cdot)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$
(3) $\partial_t u=\Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ équation de la chaleur
(4) $u(t;\cdot)\xrightarrow[t\to 0]{\|\cdot\|_2} u_0$

Preuve :

oral

L'idée pour ce développement est de raisonner par analyse-synthèse en faisant intervenir le théorème de dérivation sous le signe intégrale, le théorème de Dirichlet ainsi que d'utiliser à plusieurs reprises le théorème de Parseval.

ANALYSE

Soit $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifiant les 4 propriétés.

En particulier, à $t\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, $u(t;\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Par le théorème de Dirichlet, $u(t;x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}' c_n(t)e^{inx}$ et alors la donnée des coefficients de Fourier de $u(t;\cdot)$ nous permettra de déterminer u.

Soit $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $c_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}u(t;x)\,dx$.

Soit $I\subseteq\mathbb{R}_+^*$ segment, $g:\begin{array}{l}I\times[0;2\pi]\to\mathbb{R}\\(t;x)\mapsto e^{-inx}u(t;x)\end{array}$

(i) $\forall t\in I$, $x\mapsto g(t;x)$ est continue sur $[0;2\pi]$
(ii) $\forall x\in[0;2\pi]$, $t\mapsto g(t;x)\in\mathcal{C}^1(I)$
(iii) $\forall(t;x)\in I\times[0;2\pi]$, $\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t;x)\right|\leq\sup_{I\times[0;2\pi]}|\partial_t u|=:h(x)$

Or $h\in L^1([0;2\pi])$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a : $\forall t\in I$,
$$c_n'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}\partial_t u(t;x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}\Delta_x u(t;x)\,dx \quad \text{coefficient de Fourier de } \Delta_x u(t;\cdot)$$
$$=-n^2c_n(t)$$

Ceci étant vrai pour tout segment I, ça reste vrai sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, puisque $c_n(t)\in\mathcal{C}^1(I)$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\exists\alpha_n\in\mathbb{R}\mid\forall t\in\mathbb{R}_+^*$,
$$c_n(t)=\alpha_n e^{-n^2t}$$

Déterminons alors les (α_n).

Par le théorème de Dirichlet, $u(t;x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'\alpha_n e^{-n^2t}e^{inx}$

Puisque $u_0\in L^2([0;2\pi])$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $u(t;\cdot)\in L^2([0;2\pi])$, par le théorème de Parseval,
$$\|u(t;\cdot)-u_0\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|\alpha_n e^{-n^2t}-d_n|^2$$
$$\xrightarrow[t\to0]{}0 \qquad \xrightarrow[t\to0]{}\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|\alpha_n-d_n|^2$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\alpha_n=d_n$.

Ainsi, $u(t;x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'d_ne^{-n^2t}e^{inx}$, et sous réserve d'existence, cette solution est unique.

SYNTHÈSE

Soit $u(t;x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'d_ne^{-n^2t}e^{inx}$.

(1) Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. L'application $u(t;\cdot)$ est 2π-périodique

(2) Montrons que $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R};\mathbb{R})$

Par le théorème de Parseval,
$\|u_0\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|d_n|^2$. En particulier, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $|d_n|\leq\|u_0\|_2$

Soit $t_0\in\mathbb{R}_+^*$, $t\geq t_0$, $n\in\mathbb{Z}$ et $a,b\in\mathbb{N}$.
$$\left|d_n\frac{\partial^a(e^{-n^2t})}{\partial t^a}\frac{\partial^b(e^{inx})}{\partial x^b}\right|=\left|d_n\times(-n^2)^ae^{-n^2t}(in)^be^{inx}\right|$$
$$\leq\|u_0\|_2|n|^{2a+b}e^{-n^2t_0}$$

Ainsi, u et toutes ses dérivées convergent normalement sur $[t_0;+\infty[\times\mathbb{R}$

Ceci étant vrai pour tout $t_0\in\mathbb{R}_+^*$, $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R};\mathbb{R})$

(3) Soit $n\in\mathbb{Z}$, $t,x\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[d_ne^{-n^2t}e^{inx}\right]=-n^2d_ne^{-n^2t}e^{inx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[d_ne^{-n^2t}e^{inx}\right]$$

(4) Par le théorème de Parseval,
$$\|u(t;\cdot)-u_0\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|d_n-c_n(t)|^2$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|d_n|^2|1-e^{-n^2t}|^2$$
$$\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|d_n|^2$$
$$\leq\|u_0\|_2^2$$

Par le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{t\to0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}}'|d_n|^2|1-e^{-n^2t}|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}'\lim_{t\to0^+}|d_n|^2|1-e^{-n^2t}|^2=0$$

Ainsi, $u(t;\cdot)\xrightarrow[t\to0]{\|\cdot\|_2}u_0$.

Temps.
44' 45" speechless